# ОСОБЕННОСТИ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

# Обозначения

Пусть некоторый непрерывный сигнал $s(t)$ представлен эквидистантными значениями. Т.е. имеется последовательность значений сигнала $s(t)$ :

$s(t_1), s(t_2), \ldots, s(t_N)$ , где $t_i = t_{i-1} - \Delta t, \quad i = 2, 3, \ldots, N$

Сокращенное обозначение $\boldsymbol{S} = (s(t_1), s(t_2), \ldots, s(t_N))$

Пусть множество непрерывных функций $\boldsymbol{S}$ из функционального пространства $V_n$ . В котором для $\forall \boldsymbol{S}, \boldsymbol{g} \in V_N$ скалярное произведение

$$\langle \boldsymbol{S}, \boldsymbol{g} \rangle = \sum_{i=1}^{N} s(t_i) \cdot g(t_i) \qquad (1)$$

норма

$$\|\boldsymbol{S}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{S}, \boldsymbol{S} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} s^2(t_i)} \qquad (2)$$

# Обобщенное преобразование Фурье

Если сигнал $S$ принадлежит пространству $V_n$, то он единственным образом может быть представленным в виде

$$s(t) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \cdot \varphi_k(t) \qquad (3)$$

где вектор-строка $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$,

$$\lambda_k = \frac{\langle S, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|}, \quad k = 1, 2, \ldots, N \qquad (4)$$

является представлением сигнала в пространстве $R_n$,

$\varphi_k,\ k = 1, 2, \ldots, N$ базис, на который натянуто пространство $V_n$.

# Преобразование Фурье

Если в качестве базиса выбрать систему

$$\cos\left(t \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot k)}{N}\right), \sin\left(t \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot k)}{N}\right), \ \ldots \ k = 0, 1, \ \ldots, \left[\frac{N-1}{2}\right] \qquad (5)$$

то $\lambda_k, \quad k = 1, 2, \ \ldots, N$ примут вид:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} s(t_i) \cdot \cos\left(t_i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N}\right) \\ \beta_k &= \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} s(t_i) \cdot \sin\left(t_i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N}\right) \end{aligned}, \quad k = 1, 2, \ \ldots, \left[\frac{N-1}{2}\right] \qquad (6)$$

где

$$\frac{N}{2} = \sum_{i=1}^{N} \cos^2\left(t_i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N}\right) = \sum_{i=1}^{N} \sin^2\left(t_i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N}\right), \quad k = 1, \ \ldots, \left[\frac{N-1}{2}\right]$$

# Преобразование Фурье

Используя обозначения

$$\left.\begin{aligned}\rho_k &= \frac{\alpha_k}{|\alpha_k|}\cdot\sqrt{(\alpha_k)^2+(\beta_k)^2}\\ \phi_k &= \arctan\left(\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right)\end{aligned}\right.,\quad k=0,\,1,\,\ldots,\left[\frac{N-1}{2}\right] \qquad (7)$$

представление $$s(t)=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\cdot\varphi_k(t) \qquad (3)$$

примет вид:

$$s(t)=\rho_0+\sum_{k=1}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]}\rho_k\cdot\cos\left(t\cdot\frac{2\cdot\pi\cdot k}{N}-\phi_k\right) \qquad (8)$$

## Применение преобразования Фурье

Преобразование сигнала в ряд (8) используется в задачах моделирования различных процессов. При этом исследователи используют несколько первых слагаемых ряда, отбрасывая все остальные.

Недостатком такого метода является сложность интерпретации слагаемых ряда (8), а именно

$$\rho_k,\ \phi_k,\quad k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{N-1}{2}\right]$$

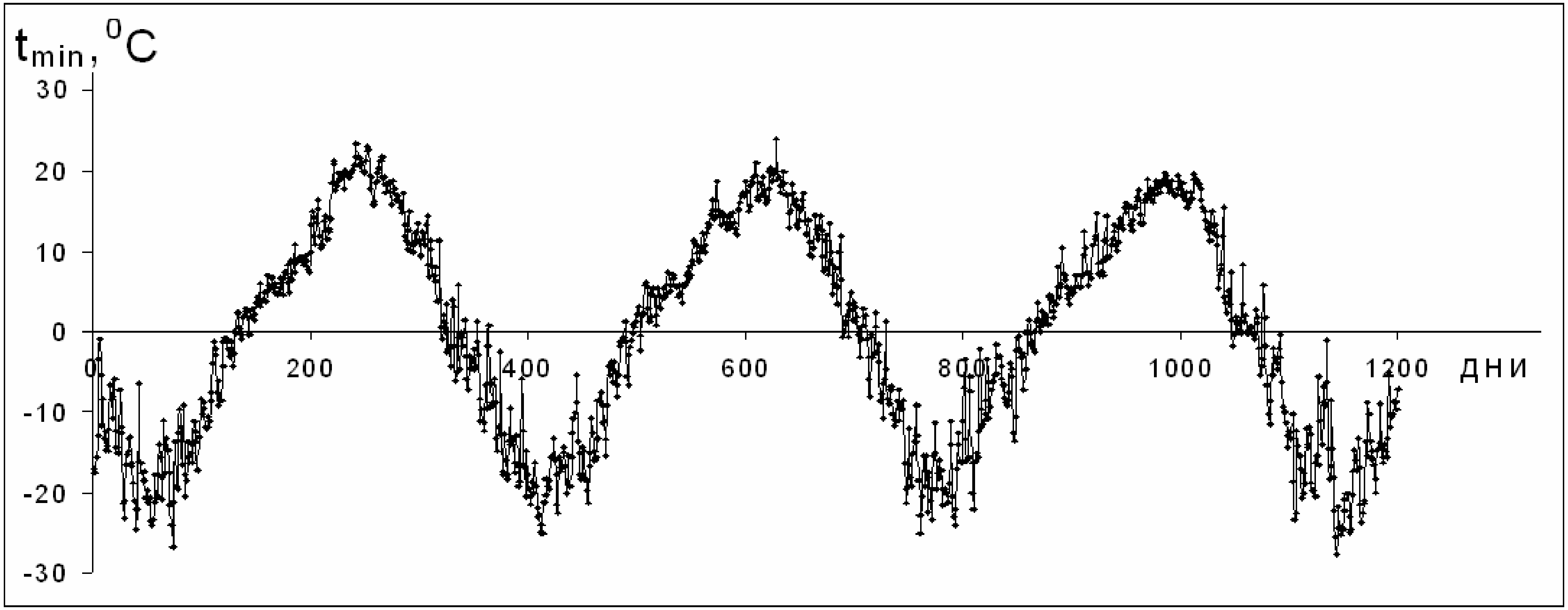
где $\rho_k,\quad k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{N-1}{2}\right]$ дискретный спектр Фурье.

На практике, для оценки несущей частоты сигнала используется непрерывный спектр, определяемый по формуле

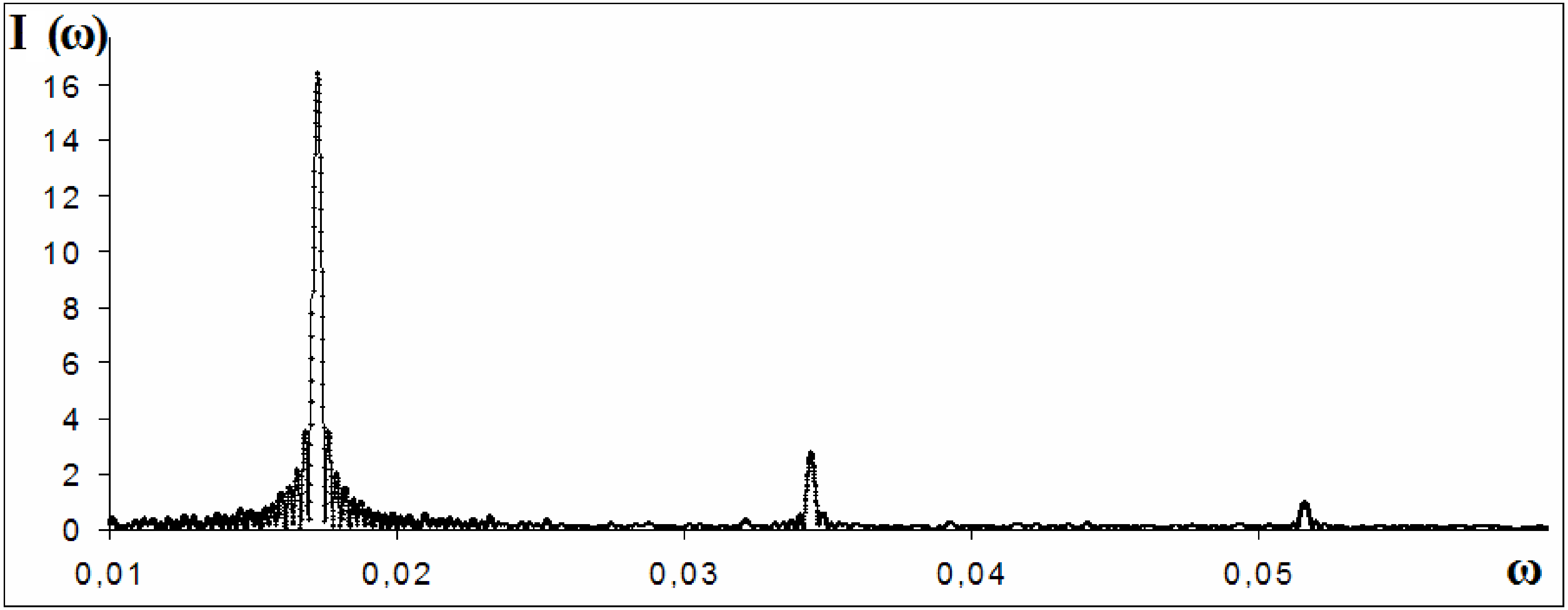
$$I(\omega) = \sqrt{A(\omega)^2 + B(\omega)^2}, \qquad (9)$$

$$A(\omega) = \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} s(t_i) \cdot \cos(\omega \cdot t_i), \qquad B(\omega) = \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} s(t_i) \cdot \sin(\omega \cdot t_i).$$

## Динамика минимальной температурой воздуха в приземном слое атмосферы по ГМС г.Владивостока за период с 01.12.1923 по 31.03.1985 (22402 значения)



## Спектрограмма ряда данных суточного разрешения синоптических наблюдений за минимальной температурой воздуха в приземном слое атмосферы по ГМС г.Владивостока за период с 01.12.1923 по 31.03.1985 (22402 значения)

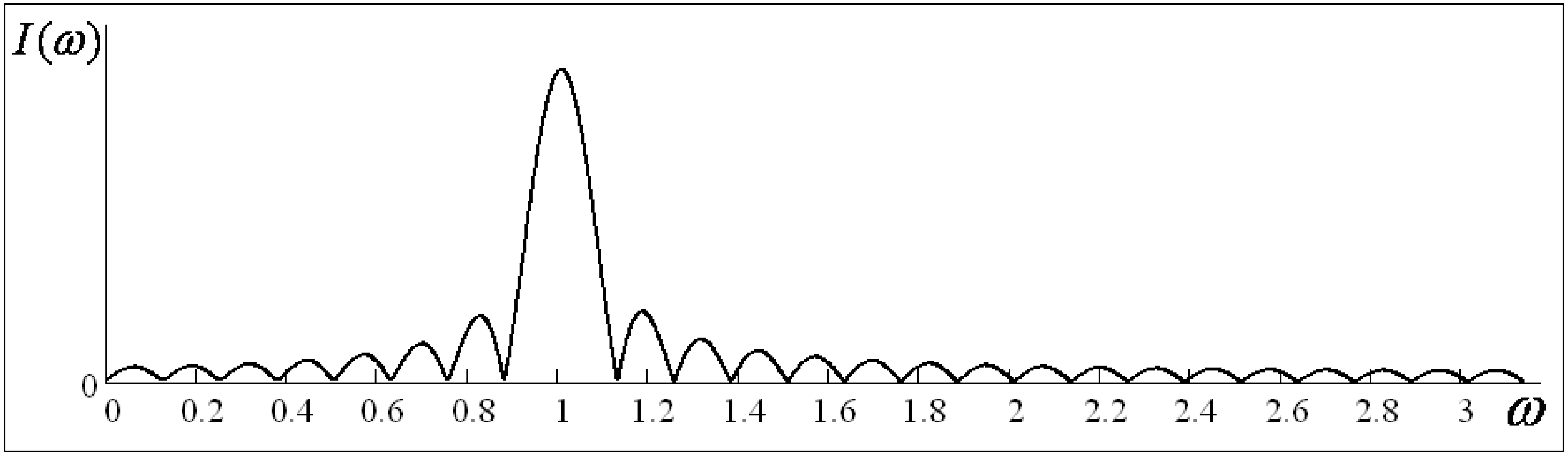


# Разрабатываемый алгоритм выделения гармонической составляющей сигнала

1. Построение спектрограммы сигнала.
2. Оценка несущей частоты и фазы гармонической составляющей сигнала по пику спектрограммы.
3. Оценка амплитуды гармонической составляющей сигнала по максимальному значению скалярного произведения сигнала и косинуса.

# Теоретическая часть

1. Теорема 1: $\sup I(\omega) = I(\tau)$, где $\tau$ несущая частота сигнала $s(t_i) = R \cdot \cos(\tau \cdot t_i - \phi)$.




2. Теорема 2: Если фаза $\phi \approx 0$ сигнала $s(t_i) = R \cdot \cos(\tau \cdot t_i - \phi)$, то $A(\tau) = R$ и

$B(\tau) = 0.$